Continuatio Methodi infallibilis, ex qua patet ad oculum, excessus & defectus quantitatum falsarum proportionaliter crescentium per problemata præcedentia legitimè determinari.

5) PROBLEMA III. *Determinare rationem quadrati diametri ad lunulam.*

Resolutio & Demonstratio. Ex Theoremate *Hipocratis* constat, quadratum diametri esse ad lunulam, ut 4 : 1 : ergo ratio 16 : 5 est excessiva, & ratio 9 : 2 defectiva. Investigando igitur lunulam, respondentem quadrato diametri 4, per has rationes falsas, prodit excessiva $\frac{20}{16}$ & defectiva $\frac{8}{9}$, quæ reductæ ad denominatorem communem 144, exhibent æquivalentes $\frac{180}{144}$ & $\frac{128}{144}$, quarum posterior ablata ex priore, relinquit summam exc: & defectus $\frac{52}{144}$. Jam cum per reductionem lunularum falsarum ad denominatorem communem 144, termini excessus *novies*, & termini defectus *sedecies* fuerint multiplicati; necesse est, summam resolvere in 2 partes reducibiles per 9 & 16, quæ per problema II. illico reperiuntur: nam auferendo ex numeratore summæ $\frac{52}{144}$ denominatorem majorem 16, relinquitur residuum 36 exactè divisibile per denominatorem minorem 9: ergo legitimæ partes summæ sunt $\frac{36}{144}$ & $\frac{16}{144}$, quarum prior reducta per denominatorem 9 lunulæ defectivæ, sistit excessum $\frac{4}{16}$, & posterior reducta per denominatorem 16 lunulæ excessivæ, defectum $\frac{1}{9}$. Ergo lunula vera est $\frac{20}{16} - \frac{4}{16} = \frac{16}{16} = 1$; vel $\frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$, ad quam est quadratum diametri, ut 4 : 1. Jam cum eadem ratio per innumera paria rationum falsarum reperiatur; dubitari nequit, quin excessus & defectus per problema 2dum legitimè determinentur.

6) PROBLEMA IV. *Determinare rationem Rectanguli ad parabolam super eadem basi & ejusdem altitudinis.*

Resolutio & Demonstratio. Rectangulum, ut per *calculum integralem* demonstratur, est ad parabolam hanc ut 3 : 2 : ergo ratio 10 : 7 est excessiva & 8 : 5 defectiva. Indagando itaque parabolam respondentem Rectangulo 3 per has rationes falsas, prodit excessiva $\frac{21}{10}$ & defectiva $\frac{15}{8}$, quæ reductæ ad denominatorem communem 80, produnt æquipollentes $\frac{168}{80}$ & $\frac{150}{80}$, quarum posterior, dempta ex priore, relinquit summam excessus & defectus $\frac{18}{80}$. Jam cum per reductionem parabolarum falsarum ad denominatorem communem 80, termini excessus *octies* & termini defectus *decies* fuerint multiplicati; necesse est, summam $\frac{18}{80}$ resolvere in partes reducibiles per 8 & 10. Auferendo itaque denominatorem majorem 10 ex numeratore summæ 18, relinquitur residuum 8 exactè divisibile per denominatorem minorem 8: ergo partes summæ sunt $\frac{8}{80}$ & $\frac{10}{80}$, quarum prior reducta per denominatorem 8 parabolæ defectivæ, manifestat excessum $\frac{1}{10}$, & posterior reducta per denominatorem 10 excessivæ, defectum $\frac{1}{8}$. Ergo parabola vera est $\frac{21}{10} - \frac{1}{10} = \frac{20}{10} = 2$; vel $\frac{15}{8} + \frac{1}{8} = \frac{16}{8} = 2$, ad quam igitur rectangulum est, ut 3 : 2. Jam cum eadem ratio per innumera

paria

paria rationum falsarum eruatur; palam est, excessus & defectus per problema 2dum legitime determinari.

7) THEOREMA. *Si denominator peripheriæ defectivæ est 1, debet summa exc: & defect: constare ex excessu invariato, & defectu ad majores terminos reducto.*

Demonstratio. Per reductionem peripheriæ defectivæ $\frac{24}{1}$ ad denominatorem excessivæ, termini ejus toties multiplicantur, quoties denominator ejus 1 continetur in illo: ergo etiam termini defectus toties crescere debent Jam vero termini peripheriæ exces: non mutantur, quia per denominatorem $= 1$ multiplicari nequeunt: ergo excessus in illa latens manet invariatus. Ablata itaque periph. defect. majoribus terminis expressa ex excessiva, necessario relinqui debet differentia, h. e. summa excessus & defectus conflata ex excessu invariato, & defectu ad majores terminos reducto.

8) *Corollarium.* Dempto itaque hoc defectu è summa, relinquitur excessus quæsitus; & quia defectus ille est semper ejusdem denominationis cum summa, & numerator ejus idem ac denominator peripheriæ excessivæ; palam est, auferre juxta requisitum problematis 1mi denominatorem excessivæ è numeratore summæ, esse idem, ac demere defectum majoribus terminis expressum ex summa.

9) PROBLEMA. V. Universalissimum. *Per rationem exces: 4: 13 & defect: 1 : 3 invenire peripheriam cujuslibet diametri datæ.*

Resolutio. Summa exces: & defectus reducatur ad denominatorem 8; quo facto unum dimidium summæ æquivalentis erit excessus & alterum dimidium defectus. E. gr. Peripheriæ falsæ diametri 7 per dictas rationes inventæ, sunt $\frac{91}{4}$ & $\frac{21}{1} = \frac{84}{4}$, quæ ex se demptæ, relinquunt $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$: ergo excessus est $\frac{7}{8}$ & defectus quoque $\frac{7}{8}$.

Demonstratio. Peripheriæ falsæ diametri 8 per dictas rationes inventæ, sunt $\frac{104}{4}$ & $\frac{24}{1} = \frac{96}{4}$, quæ ex se ablatæ relinquunt summam exc. & defect. $\frac{8}{4}$. Jam cum per reductionem peripheriæ defect. $\frac{24}{1}$ ad denominatorem 4. excessivæ, termini defectus *quater* fuerint aucti; necesse est, summam $\frac{8}{4}$ resolvere in 2 partes, quarum una sit reducibilis per denominatorem 4 excessivæ; hæc autem nequit esse alia nisi $\frac{4}{4}$, quæ ablatæ ex summa, relinquunt excessum quæsitum $\frac{4}{4}$, quæque reductæ per denominatorem 4, manifestant defectum quæsitum $\frac{1}{1}$. Ergo peripheria vera est $\frac{104}{4} - \frac{4}{4} = \frac{100}{4} = 25$; vel $\frac{24}{1} + \frac{1}{1} = 25$. Jam cum excessus & defectus periph. falsarum crescant in ratione diametrorum; palam est, excessum periph. diametri 1 esse $\frac{4}{4} : 8 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ & defectum $\frac{1}{1} : 8 = \frac{1}{8}$: consequenter tam excessum, quam defectum periph. diametri 2 esse $\frac{2}{8}$, h. e. majorem duplo, diametri 3 triplo & ita porro; ex quo manifestum est, tam excessum, quam defectum periph. falsarum diametri 7 esse $\frac{7}{8}$. Ergo peripheria vera est $\frac{91}{4} - \frac{7}{8} = \frac{182}{8} - \frac{7}{8} = \frac{175}{8}$; vel $\frac{84}{4} - \frac{7}{8} = \frac{168}{8} + \frac{7}{8} = \frac{175}{8}$, ad quam diameter est, ut $7 : \frac{175}{8} = 56 : 175 = 8 : 25$. Cum igitur quævis diameter sit ad periph. per hoc problema inventam, ut 8 : 25, evidens est; hanc rationem esse unicam veram.